Zahlbegriff, zwischen dem Teufel und der tiefen See

von Rainer Kaenders

EIN GELEHRTES HUHN wollte seinen Mithühnern das Zählen und Addieren beibringen. Es schrieb die Zahlen 1 bis 9 auf eine Wand des Hühnerstalls und erklärte, wenn man sie zusammentue, könne man noch größere Zahlen bekommen. Um den anderen das Addieren beizubringen, schrieb es auf eine andere Wand: 1 + 1 = 11; 2 + 2 = 22; 3 + 3=33 und so weiter bis 9 + 9 = 99. Die Hühner lernten die Addition und fanden sie sehr zweckmäßig.

Luigi Malerba, Die nachdenklichen Hühner

Einleitung

31 ist eine Primzahl, 331 ist auch eine Primzahl und 3331 ebenso. Die Folge 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331, 333333331… enthält nur Primzahlen.

„Warum bist du doch so misstrauisch?“ fragt der Zahlenteufel den träumenden Robert. Auch der Schriftsteller Hans Magnus Enzensberger lässt seinen Zahlenteufel mathematische Geschichten erzählen, bei denen man immer gut aufpassen muss, ob sie denn auch wirklich stimmen. Robert, die Figur mit der sich so viele Leser und besonders Schüler identifizieren können, fragt: „Gut, du hast mir einige Tricks erzählt, das ist wahr. Aber ich frage mich: *warum*? Warum kommt mit den Tricks raus, was rauskommt? … Und warum stimmt alles, was du sagst *immer*?“. „Ah, sagte der Zahlenteufel, so ist das. Du willst nicht nur herumspielen mit den Zahlen? Du willst wissen, was dahinter steckt? Die Spielregeln? Den Sinn des Ganzen? Mit einem Wort, du stellst dieselben Fragen wie ein richtiger Mathematiker.“

Oft wird der Begriff *Kreativität* in Zusammenhang mit Mathematik beschränkt auf das Lösen vorgegebener Probleme durch kreative Lösungsansätze, auf die originelle Zusammenstellung bekannter Inhalte in mathematischen Lehrbüchern oder auf die Erschaffung neuer Mathematik – finden doch gerade diese Schöpfungen Anerkennung innerhalb der Mathematik. Obwohl Enzensberger in seinem Buch keine Probleme löst, kein Lehrbuch schreibt und keine neuen mathematische Erkenntnisse entwickelt, steht außer Zweifel, dass das Schreiben dieses Buches nicht nur literarisch sondern auch mathematisch einen kreativen Akt darstellt. Alle Kontexte, die der Zahlenteufel für Robert im Traum erschafft, sind motiviert durch Mathematik. Es bedarf wohl eines Schriftstellers um auf diese Form mathematischer Kreativität aufmerksam zu machen.

Anstatt mit einer vorsichtigen Einführung in elementare Zahlentheorie beschäftigt der Zahlenteufel den mathematisch unbelasteten Leser mit Inhalten, die im Niveau variieren von der Grundschule bis hin zu offenen Forschungsfragen. Im Spannungsfeld zwischen axiomatisch logischer Darstellung oder unmittelbarer Einbettung in andere Zusammenhänge zeigt Enzensberger einen Ausweg, der an das erinnert, was einst Freudenthal für den Geometrieunterricht vorgeschlagen hat: „The escape that is left, is the deep sea. It is a safe escape if you have learned swimming. In fact, that is the way geometry should be taught, just like swimming.“ (Freudenthal, 1971, p. 435)

Im niederländischen Mathematikunterricht an der Schule hat sich in den letzten Jahrzehnten ein grundlegender Wandel in Hinblick auf die Mathematik als Wissenschaft voll-zogen. Gerade für den Aufbau eines tragfähigen Zahlbegriffs hat dies weitreichende Folgen. Begriffe, die traditionell in der Grundschule und den ersten Jahren der weiterführenden Schulen behandelt wurden, wie kleinstes gemeinsames Vielfaches, größter gemeinsamer Teiler oder Primzahl sind schon lange nicht mehr Gegenstand des Unterrichts und selbst den Abiturienten in der Regel nicht bekannt. Wagt sich der einzelne Lehrer doch an den Unterricht solcher Hintergründe, verlangt das bei 17-jährigen Schülern grundsätzlich andere Herangehensweisen als bei Grundschulkindern. Zunächst müssen hartnäckige Misskonzepte vertrieben werden.

Gleichzeitig mit der veränderten Haltung zur Mathematik als Wissenschaft hat es im Bereich havo/vwo[1] eine Hinwendung zu Arbeitsformen und Schulstrukturen gegeben, in denen die Schüler immer selbständiger – oft aber auch mit ihren Schulbüchern alleingelassen – arbeiten (*tweede fase*). Eine fachlich und in der jeweiligen Praxis fundierte Didaktik hierzu ist für die Mathematik wenig entwickelt.

In Nimwegen und Umgebung haben sich sechs erfahrene Mathematiklehrer, die an drei verschiedenen Schulen unterrichten, und der Autor seit einigen Jahren in einem Forschungsprojekt zusammengefunden, um an Hand von selbst entwickelten Materialien aktives und selbständiges Lernen bei ihren Schülern zu erforschen und zu fördern. Die gemeinsam durchgeführte *Aktionsforschung* beinhaltet: alle in der Gruppe erkunden – über die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien hinaus – zunächst didaktische und mathematische Hintergründe, reflektieren die eigene Unterrichtspraxis und lernen mit Hilfe von systematischen Untersuchungen mehr über tatsächlich umsetzbare Möglichkeiten von aktivem und selbständigem Lernen. Die Resultate dieser *Aktionsforschung* sind relevant für die tägliche Arbeit der beteiligten Lehrer und bestehen überwiegend aus ‚lokalem Wissen', dessen Gültigkeit sich zunächst auf den Kontext der beteiligten Lehrer und ihrer direkten Kollegen bezieht und für andere Mathematiklehrer als Anregung dienen kann. Durch die systematische Darstellung dieser Arbeit und ihrer Rahmenbedingungen kann hieraus allgemeineres Wissen über aktives und selbständiges Lernen von Mathematik in der Schule erwachsen (vgl. Krainer, 2003). Das Projekt ist Teil des so genannten AZL Projektes (aktiv und selbständig lernen), einer Partnerschaft zwischen drei Schulen und dem *Institut für Lehrer und Schule* der *Radboud Universität Nimwegen*, an dem Lehrer aus 18 Schulen und sieben Fachdidaktiker versuchen in jeweiligen Fachgruppen fachdidaktische Einsichten zu gewinnen zur Entwicklung, Erforschung und Ausführung aktiven und selbständigen Lernens.

In den Schuljahren 2003/04 und 2004/05 befasste sich die AZL Mathematikgruppe[2] mit der Entwicklung einer Unterrichtsreihe zum Thema Zahlentheorie für Schüler aus 5 vwo (11. Schuljahr) mit einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil. Ausgehend von Erfahrungen in früheren Projekten wurde mögliche Kreativität von Schülern in der Zahlentheorie untersucht – einem auf jedem Niveau anspruchsvollen mathematischen Gebiet. Die Unterrichtsreihe findet als „praktischer Auftrag" statt, einer in der *tweede fase* in vielen Schulfächern vorgeschriebenen Unterrichtsform mit einem Umfang von etwa zehn Unterrichtsstunden. Während ihrer Entwicklung wurde die Reihe in zwei Unterrichtszyklen in 8 Klassen an drei Schulen unterrichtet. Das Unterrichtsmaterials entstand in Freudenthalscher Tradition durch *Entwicklungsforschung* (siehe z. B. Freudenthal, 1991), welcher die Auffassung von Mathematikdidaktik als *design science* zugrunde liegt (siehe Wittmann, 1995 und 2005).

In diesem Artikel beschreiben wir zunächst einige Hintergründe des niederländischen Mathematikunterrichts soweit sie für eine Unterrichtsreihe zur Zahlentheorie von Bedeutung sind und gehen dann auf die Lernprozesse der Schüler ein. Ausgehend von Überlegungen zur Kreativität stellen wir dar, inwiefern das Buch *Der Zahlenteufel* zur Lösung der gestellten didaktischen Probleme bei 17-jährigen beitragen kann und erläutern dies anhand von Schülerarbeiten. Auf unser eigenes Lernen sowie auf die Methodologie des Forschungs- und Entwicklungsprozesses samt der Forschungsdaten gehen wir hier nicht ein. Alle entwickelten Materialien mit Erläuterungen für Lehrer sowie verschiedene Veröffentlichungen der AZL Mathematikgruppe sind auf der Website des Nimwegener Ratio-Projektes erhältlich: **www.ratio.ru.nl**.

Hintergründe zum niederländischen Mathematikunterricht

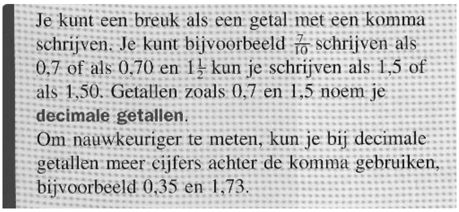
Je kunt een breuk als een getal met een komma schrijven. Je kunt bijvoorbeeld $\frac{7}{10}$ schrijven als 0,7 of als 0,70 en $1\frac{1}{2}$ kun je schrijven als 1,5 of als 1,50. Getallen zoals 0,7 en 1,5 noem je **decimale getallen**.
Om nauwkeuriger te meten, kun je bij decimale getallen meer cijfers achter de komma gebruiken, bijvoorbeeld 0,35 en 1,73.

Abb. 1: Einführung „dezimaler Zahlen“ in einer großen Schulbuchserie

Zahlbegriff und andere Aspekte mathematischer Kultur, welche die alltägliche Nützlichkeit in profanen Bereichen übersteigen, führen seit Jahren ein stiefmütterliches Dasein im niederländischen Mathematikunterricht von havo/vwo. Da die Inhalte des Unterrichts in der Regel von Schulbuchserien („methoden“) festgelegt werden, ist es für den einzelnen Lehrer sehr schwer, dies zu durchbrechen (s. **Abb. 1**). Dadurch, dass Begriffe wie Teilbarkeit oder Primzahlen nicht mehr im Curriculum vorkommen – weder in der achtjährigen Grundschule noch auf einer weiterführenden Schule, führt die Bruchrechnung in der ersten Klasse von havo/vwo (7. Schuljahr) zu Problemen, die oft ‚gelöst' werden, indem der entsprechende Stoff nicht mehr behandelt wird.[3] Dies ist ein Beispiel *antididaktischer Omission*, (Kaenders, 2003) d. h. der Lösung mathematikdidaktischer Probleme, durch Weglassen der damit verbundenen Lehrinhalte. Dabei ist das Weglassen von technischen Details, aufwendigen Notationen, Querverbindungen und anderem – falls didaktisch eingesetzt – ein überaus wichtiges und notwendiges Mittel des Mathematikunterrichts. Die antididaktische Omission der Bruchrechnung zieht weitere Probleme nach sich. Etwa bei der Herleitung der so genannten abc-Formel zur Lösung einer quadratischen Gleichung mittels quadratischer Ergänzung führt das Gleichnamigmachen zweier Brüche bei den meisten Schülern zu großen Schwierigkeiten. Daher sind die Schulbücher dazu übergegangen, den Schülern die abc-Formel ohne weitere Erklärungen vorzusetzen. Der Unterricht richtet sich dann auf das Finden von a, b und c; die Formel wird als Anleitung zum Eintippen der Zahlen in den Taschenrechner interpretiert. Auch in höheren Klassen sind die Lehrinhalte entsprechend angepasst: zum Beispiel in der Statistik oder bei der Behandlung von Differentialquotienten, wo die Differentiationsregeln nicht mehr bewiesen oder einsichtig gemacht werden. Noch in der Fachhochschule und der Universität ist die Bruchrechnung unverändert ein Problem (vgl. Smid, 2004). Reelle Zahlen sind zu „Kommazahlen“ geworden – Symbole, die auf Taschenrechnern erscheinen. Schriftliches Dividieren und der Zusammenhang zwischen Bruch- und Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl kommen nicht vor – ganz zu schweigen von Irrationalität oder komplexen Zahlen.[4]

Über den Zahlbegriff hinaus gibt es weitere antididaktische Omissionen bei grundlegenden Konzepten: Aussagenlogik, elementare Sprache von Strukturen und Mengen, Abbildungsbegriff, lineare Algebra, Definitheit, Monotonie, infinitesimale Begriffe wie Grenzwert, Stetigkeit, Asymptote, Vollständigkeit, Differenzierbarkeit etc. wie auch echte Anwendungen, die ohne mathematisches Grundgerüst nicht zu behandeln sind. Mathematische Konzepte selbst, mit entsprechenden Definitionen, werden in den großen Schulbuchserien nicht mehr entwickelt oder als solche betrachtet.

Verschiedene Qualitäten ‚mathematischen gewahr Werdens' (*wiskundig besef, mathematical awareness*) werden in den Lehrplänen und im Abschlussexamen einander gleich gestellt. Meistens haben die Schüler die Wahl zwischen einer wie es heißt ‚maschinellen' oder einer ‚Stift-und-Papier-Lösung'. Ob sie dann eine mathematisch korrekte Ableitung der Lösung mit eventueller Kenntnis der Definitionen und Hintergründe geben können oder nicht, wird nicht getestet, da es in der Regel auch nicht Inhalt des Unterrichts ist. Dazu kommen Konzepte oder Definitionen, die mathematisch keinen Sinn ergeben (*junk mathematics*), wie etwa „Kommazahlen", „Produktfunktionen", „gewinnende Funktionen", „Weiß- und Schweißwahrscheinlichkeiten", „vollständiger Graf", etc. Keine oder falsche Definitionen machen Sprache willkürlich und verhindern Theoriebildung. Es bleiben Verkündigung, Indoktrination, Pseudoargumentation. Offiziell ist festgelegt, dass beispielsweise eine Formulierung wie „Los op!", also „Löse!", bedeutet, dass man unbeschränkt Gebrauch von seinem grafischen Taschenrechner machen darf. Wird „löse!" im herkömmlichen Sinn gemeint, dann muss es heißen: „Los exact op!". Zur Korrektur der zentralen Abschlussprüfungen ist eine umfangreiche Jurisprudenz zur Interpretation der Formulierungen entstanden. An sich sinnvolle didaktische Hilfskonstrukte wie z. B. die so genannte ‚Balkenwagenmethode' oder die ‚Tellermethode' zur Lösung von Gleichungen sind jetzt selbst zu Lernzielen einer sich von der richtigen Mathematik unterscheidenden Schulmathematik, einem Storchenmärchen (Freudenthal, 1973), geworden (Kaenders, 2005a). War in den siebziger Jahren die Rede von *New-Math*, einer Bewegung, der vor allem *antididaktische Inversion* (Freudenthal) vorgeworfen wurde, so kann man nun eher von einer No-Math Bewegung sprechen, die ihr Heil in *antididaktischen Omissionen* sucht.

Neben diesen Entwicklungen gibt es jedoch auch Projekte im niederländischen Mathematikunterricht, die in eine andere Richtung weisen. Hier sind u.a. die zunehmende Anzahl von Schulen, die sich in mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung profilieren wollen, *university colleges* für Schüler, Internetschulbücher (Wisweb, MathAdore, Ratio), kleine nicht-kommerzielle Schulbuchserien, die so genannten Zebra Bücher, die mathematische Schülerzeitschrift Pythagoras, wiskunde B- und A-dag am Freudenthal Institut, Känguru und Mathematikolympiade, der CWI vakantiecursus und noch immer ein Teil der Lehrer, die ihren Unterricht nicht ganz den Schulbüchern überantworten, zu nennen. Die *tweede fase* eröffnet engagierten Lehrern neue und interessante Möglichkeiten, ihre Schüler zu aktivieren. Niederländische Schulen stehen ihren Lehrern in der Sorge um ihre Schüler durch vielfältige ergänzende pädagogische Angebote zur Seite.[5] Die Niederlande haben 2003 im PISA Test gut abgeschnitten (538) – zumindest besser als ihre östlichen Nachbarn (503).

Doch besonders Schüler mit mathematisch-naturwissenschaftlichen Interessen als auch die Wirtschaft und die Wissenschaft, die dringend solche Absolventen brauchen, werden durch die Verhältnisse hart getroffen. Seit Jahren variieren landesweit die Zahlen der Erstsemester in Mathematik zwischen hundert und zweihundert Studenten, aus denen unter anderem die universitär ausgebildeten Mathematiklehrer noch hervorgehen sollen. Diese bilden schon lange eine verschwindende Minderheit an ihren Schulen. Der übergroße Teil der Lehrer hat selbst nur einen havo-Abschluss und ist an einer *Hogeschool* ausgebildet, an denen der Unterricht oft mit denselben Schulbüchern stattfindet, in denen man Begriffe wie rationale Zahl oder Primzahl vergeblich sucht. Das Ministerium OCW hat zu alledem ab dem Jahr 2007 für Schüler mit einem mathematsch-naturwissenschaftlichen Profil die Anzahl der Mathematikstunden in der Oberstufe um 32 % reduziert (von 760 auf 520).

Aufgrund der nicht verstummenden Kritik von Universitäten, Fachhochschulen und Berufsausbildungen scheint sich nun langsam eine Wende abzuzeichnen. Gegen Ende 2005 wurde vom Ministerium OCW eine *Erneuerungskommission Mathematik*[6] (cTWO) ins Leben gerufen, die mit der Formulierung neuer Lehrpläne zum Jahr 2010 und darüber hinaus beauftragt ist.

Aktives und selbständiges Lernen im Mathematikunterricht

Für die Bildung der Schüler ist es wichtig zu formulieren, was die Schüler in der entwickelten Unterrichtsreihe lernen und erfahren sollen. Im einzelnen ist das:
- Aufarbeitung von Defiziten beim Zahlbegriff,
- Zahlentheorie als Beispiel für Wissenschaft,
- Vermittlung allgemeiner mathematischer Kultur,
- Mathematik als nicht fertiges, lebendes Fach mit menschlichen Zügen.

Aktivität und Selbständigkeit können hierzu dienen, sind aber selbst nur mittelbares Lernziel. Die Mitglieder der AZL Arbeitsgruppe stehen jenen Entwicklungen im niederländischen Mathematikunterricht kritisch gegenüber, die versuchen Aktivität und Selbständigkeit als universelles Prinzip auf alle Formen des Wissens- und Fertigkeitserwerbs, wie etwa dem Üben oder der Aufnahme deklarativen Wissens, zu verabsolutieren. Die AZL Gruppe stellt sich eher die Aufgabe aktives und selbständiges Lernen überhaupt – und dann in sehr beschränktem Rahmen – stattfinden zu lassen. Praktische Aufträge bieten hierzu die Gelegenheit. Nach Polya (1965, chapter 14) gelten für das Erlernen von Mathematik „three principles of learning: active learning, best motivation, consecutive phases: exploration, formalization, assimilation“. In Hinblick auf die oben genannten Lernziele haben diese drei einfachen allgemeinen Prinzipien, die auch modernen konstruktivistischen Lerntheorien zugrunde liegen (vgl. Verschaffel, de Corte, 1998), der Gruppe zunächst als gemeinsamer Leitdraht gedient.

Wenn es darum geht, eine Unterrichtsreihe zu entwickeln, in der Mathematik selbständig und aus eigenem Antrieb erkundet werden kann und bei der die Möglichkeit zur Kreativität gegeben ist, haben die bisherige Erfahrung im AZL Projekt gezeigt, dass verschiedene mathematische Themen oder Fertigkeiten oft sehr unterschiedliche Ansätze erforderlich machen. Darüber hinaus dürfen die Erwartungen an den Umfang des behandelten Lehrstoffs nicht allzu groß sein. Praktisch sollte eine solche Unterrichtsreihe den folgenden Punkten genügen:
1. Die Schüler haben in der Bearbeitung des praktischen Auftrages die Initiative. Sie verteilen die Arbeit und gestalten die Zeitplanung in Teilen selbst.
2. Die Schüler haben die Möglichkeit in einem vorgegebenen Rahmen, Inhalte ihrer Arbeiten selbst zu bestimmen. Hierzu gehört die nähere Auswahl der zu behandelnden Themen, die Beantwortung eigener Fragen als auch die Entfaltung eigener Kreativität.

Punkt 1 soll durch den Entwurf der Unterrichtsreihe gewährleistet sein. Dazu können die Schüler etwa die Möglichkeit bekommen, das Klassenzimmer zu verlassen, um z. B. die in allen Schulen anwesende *Mediathek* aufzusuchen und selbst zu planen, wann sie die Lehrerin hinzuziehen.

Punkt 2 beinhaltet prinzipiell, dass der Lernprozess der Schüler nicht vollständig vorhersagbar und steuerbar ist. Dies bildet eine der Herausforderungen bei der Entwicklung der Unterrichtsreihe, bei der die Schüler in ihrem Lernprozess doch begleitet werden sollen. Hier unterscheidet sich unsere Auffassung von aktivem und selbständigem Lernen von zum Beispiel *discovery learning* (‚hidden eastereggs', Freudenthal, 1991) oder von Unterricht, in dem Schüler ihre Schulbücher alleine durcharbeiten (siehe z. B. Hoogland, Weijers, 1999). Leider ist dies in der Praxis eine häufig anzutreffende Interpretation selbständigen Lernens geworden (vgl. Krüger & vd Zwaart 2003, p. 21).

Beide oben genannten Punkte sollen an einer Stelle im Lernprozess möglich werden. Ein großer Teil der Unterrichtsreihe kann hierauf durch Schaffung eines geeigneten inhaltlichen und organisatorischen Rahmens vorbereiten.

Aktiv und selbstständig Lernen bei allen drei Parteien

„Everybody demands that the high school should impart to the students not only information in mathematics but know-how, independence, originality, creativity. Yet nobody asks these beautiful things for the mathematics teacher – is it not remarkable?", schreibt Polya (1965) und drückt hiermit einen weiteren Ausgangspunkt unserer Arbeit aus: aktives und selbständiges Lernen bei Schülern wird gefördert durch aktives und selbständiges Lernen und Unterrichten der Lehrer. („Ein Schwimmlehrer gesucht, der selber schwimmen kann", Freudenthal, 1973, S. 152) Es hat sich gezeigt, dass Lehrer, die über fundierte fachliche und fachdidaktische Kenntnisse verfügen, freier unterrichten und aufgeschlossener für inhaltliche Schülerbeiträge sind (vgl. Carlsen, 1997 und Kennedy, 1998). In der Entwicklung einer Unterrichtsreihe bedeutet das, dass wir

- gemeinsam mathematikdidaktische Hintergrundliteratur lesen um eine gemeinsame Begrifflichkeit zur Verfügung zu haben,
- die zugrundeliegende Mathematik ergründen, lernen und explorieren,
- Kreativität im Umgang mit der Mathematik an den Tag legen,
- die Unterrichtsreihe so konstruieren, dass auch die Lehrer in der Begleitung der Lernprozesse aktiv und selbständig agieren können und müssen,
- die entwickelten Unterrichtsformen systematisch mit Hilfe der Schüler untersuchen,
- neue Formen des Unterrichts implementieren.

Lehrer und Fachdidaktiker teilen diese Ziele. Erstere möchten hierdurch vor allem die eigene Unterrichtspraxis verbessern. Letzterer ist an der allgemeinen Erforschung von aktivem und selbständigem Lernen interessiert, welches an wirklichen Schulen mit echten Lehrern und Schülern stattfinden kann.

Divergente Produktion im Mathematikunterricht

Die Ursachen für Motivation und Kreativität in Lernprozessen zu ergründen ist nicht leicht. Für das Verständnis von Lernen ist es jedoch unerlässlich (vgl. Freudenthal, 1978, p. 191 ff.).

Kreativ zu sein bedeutet, eigene authentische inhaltliche Beiträge zu leisten, die sich von anderen unterscheiden, und der Lernprozess des individuellen Schülers ist nicht vorhersehbar. Die klassische Beschreibung mathematischer Kreativität von Poincaré – Hadamard (Präparation, Inkubation, Illumination, Verifikation) (Hadamard, 1945) wird, wie schon Guilford (1950, S. 451) bemerkte, weder den verschiedenen Typen von Kreativität noch den individuellen Unterschieden zwischen Menschen gerecht. Gemeinsames Literaturstudium und insbesondere die Beschäftigung mit dem klassischen Unterschied zwischen konvergenter und divergenter Produktion[7] (Guilford & Hoepfner, 1976) führte zu der Frage, ob es möglich sei, neben der im Mathematikunterricht allgegenwärtigen konvergenten Produktion auch Formen von divergenter Produktion im Rahmen eines solchen praktischen Auftrages entstehen zu lassen. Diese Frage stellt sich um so mehr da, wie auch Winter (1989, Kap. 9) bemerkt, man nicht davon ausgehen kann, dass bei Schülern in einer Schulklasse die Motivation zur Fokussierung auf ein Problem sowie die Vertrautheit mit mathematischem Denken selbstverständlich vorhanden sind. Die Beteiligung der Schüler bei der Festlegung der Inhalte des Unterrichts trägt zur Motivation und überdies zur Bildung mündiger Bürger bei. Freudenthals (1991) Begriff der *guided reinvention*[8] kann als ein Versuch gesehen werden, beide Formen von Produktivität zu vereinen.

Schon zuvor hat die AZL Mathematikgruppe Erfahrungen mit divergenter kreativer mathematischer Produktion gemacht. Im Projekt *Rubbellose* bekamen die Schüler die Möglichkeit, eine eigene Lotterie nach einem zuvor studierten Muster zu entwerfen und zeigten hierbei durchaus Formen divergenter Produktion bei der kreativen Anwendung vorgegebener Mathematik (Van Schalkwijk, 2000). *Schlau spielen*, ein Projekt, das schon von Freudenthal vorgeschlagen wurde (Freudenthal, 1978, p. 271), ermöglichte freiere divergente Produktion: in der zweiten Hälfte des Auftrags entwarfen und untersuchten die Schüler ihr eigenes Nullsummenspiel. Die Schüler erfanden tatsächlich besonders originelle Spiele, die den vorgegebenen Bedingungen genügten und die sie dann weitgehend ohne technisches Rüstzeug untersuchten. Der Preis für die Originalität jedoch war der Rückzug auf ein sehr elementares (aber nicht triviales) Niveau von Kombinatorik. Zwar erfanden die Schüler hierbei eigene Notationen und übten sich in kombinatorischen Argumenten, doch fiel es ihnen sehr schwer, auch nur geringfügig abstraktere Methoden und Begriffe selbst zu entwickeln. Schon die Verwendung von Baumstrukturen musste, trotz genossenem Statistikunterricht, in der Regel durch den Lehrer an die Hand gegeben werden (siehe Van den Aarssen et al., 2004 und Kaenders, 2005b). Es wurde uns noch mal deutlich, wie stark beim Begriff *guided reinvention* die Betonung auf dem ersten Wort liegen muss.

Nach diesen Erfahrungen erwuchs die Frage, ob divergente Produktion von Schülern auch in einem technisch anspruchsvolleren Gebiet ermöglicht werden könne. Die zuvor gemachten Erfahrungen veranlassten die Suche nach anderen kreativen Ausdrucksformen in der Mathematik. Solche Formen von Kreativität sollten direkt und originär mit Mathematik verbunden sein. Die Gefahr, als Lehrer hier sein Glück in sekundären Motivationen zu suchen ist groß.

Vom Zahlenteufel lernen

So wie schon in der Einleitung erläutert, zeigt uns der Zahlenteufel, wie man erfrischend direkt und alles andere als dogmatisch mit Zahlentheorie umgehen kann. Der Hintergrund ei-

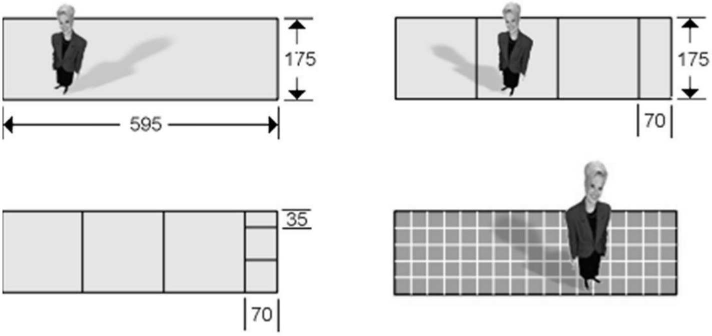

Abb. 2: Applet zum euklidischen Algorithmus aus dem Internetschulbuch von Ratio

nes Traums macht es möglich, abhängig vom mathematischen Sachverhalt, alles auftauchen und verschwinden zu lassen: Kaninchen, Kokosnüsse, beleuchtete Zahlendreiecke, schnellfließende Flüsse, etc. Die dazu nötige Kreativität verlangt vor allem divergente Produktion. Da die gesamte Ausgestaltung der Geschichte durch die dahinterliegende Mathematik motiviert ist, sehen wir dies durchaus als mathematische Kreativität. Man kann einen solchen Traum nur erschaffen, wenn man die zugrundeliegende Mathematik gründlich verstanden hat und sie auf wesentliche Aspekte reduzieren kann.

„Unverschämtheit! In der Mathematik wird nicht geraten, verstanden? In der Mathematik geht es exakt zu!“ sagt der Zahlenteufel. Es geht in dem Buch nicht nur um die Darstellung von Mathematik, es geht auch um Reflektionen über Mathematik (s. **Abb. 2**).

Die Unterrichtseinheit *De telduivel*

Hier geben wir eine sehr verkürzte Skizze des entwickelten Unterrichtsmaterials. Das Original zählt neun Seiten und dazu kommen zehn Seiten Erläuterungen für die Lehrerin. In niederländischer Sprache ist das Material frei erhältlich unter **www.ratio.ru.nl** (AZL).

Teil A Der Auftrag handelt von *Zahlentheorie* – dem Mathematiker Carl Friedrich Gauss (1777–1855) zufolge – die Königin aller mathematischen Theorien. Wir machen die Schüler darauf aufmerksam, dass manche Zahlen in kleinere Zahlen zerfallen. Zum Beispiel: $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ oder $6 = 2 \cdot 3$. Das Zerfallen als Summe ist langweilig. Das Zerfallen als Produkt dahingegen nicht: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, usw. und 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … zerfallen nicht. Diese letzteren Zahlen bekommen einen Namen.

► **Definition:** Eine natürliche Zahl größer als 1, die nicht das Produkt zweier kleinerer natürlicher Zahlen ist, nennen wir eine **Primzahl**.

Das war im wesentlichen die Theorie. Darauf folgen einige Betrachtungen zur Gültigkeit mathematischer Aussagen, wie der bekannte ‚physikalische Beweis', dass jede ungerade Zahl eine Primzahl sei. Die erste Übung für die Schüler besteht schließlich darin 13 vorgegebene Aussagen darauf hin zu untersuchen, ob sie wahr oder gelogen sind. Hier werden vor allem überzeugende Argumente statt formeller Beweise erwartet.[9] Wenn wir die k Ziffern c_k, c_{k-1}, …, c_1, c_0 einer Zahl im Zehnersystem wiedergeben wollen, schreiben wir

$n = c_k | c_{k-1} | \ldots | c_1 | c_0$. Zum Beispiel: $4711 = 4|7|1|1 = 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3$.

Wahr oder gelogen? Die folgenden Aussagen werden den Schülern vorgelegt.

1. Falls eine ungerade natürliche Zahl keine Primzahl ist, dann ist sie durch 3, 5, 7, 11 oder 13 teilbar.
2. Die Zahl 10013 ist die kleinste natürliche Zahl, die auf zwei verschiedene Weisen in Primzahlen zerlegt werden kann: $10013 = 589 \cdot 17$ en $10013 = 527 \cdot 19$.
3. Eine natürliche Zahl $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ ist teilbar durch 3 genau dann, wenn $c_k + c_{k-1} + \ldots + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0$ teilbar ist durch 3.
4. Eine natürliche Zahl $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ ist teilbar durch 11 genau dann, wenn $c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - c_5 \ldots c_k$ teilbar ist durch 11.
5. Eine natürliche Zahl $n = c_k|c_{k-1}|\ldots|c_1|c_0$ ist teilbar durch 7, 11 oder 13 teilbar g.d.w. $c_k|c_{k-1}|\ldots|c_4|c_3 - c_2|c_1|c_0$ teilbar ist durch 7, 11 oder 13. (Berechne $7 \cdot 11 \cdot 13$.)
6. Die quadratische Folge (d. h. die Differenzenfolge ist eine arithmetische Folge), deren erste Terme gegeben werden durch 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83,… besteht ausschließlich aus Primzahlen.
7. Es gibt nur endlich viele Primzahlen. Die größte Primzahl $2^m - 1$ mit $m = \ldots$ (gerade aktueller Wert) ist ein Beispiel einer *Mersenne-Primzahl*, die am (entsprechendes Datum) gefunden wurde.
8. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt: $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + \binom{n}{0} = 2^{n-1}$.
9. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt: $(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3$.
10. Jede der Zahlen in der Folge 31, 331, 3331, 33331, 333331, … ist eine Primzahl.
11. Die Zahl mit periodischer Dezimaldarstellung 0,9999999… ist gleich 1.
12. Die Summe der ersten k ungeraden natürlichen Zahlen ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.
13. $\sqrt{10}$ kann man als Bruch schreiben, oder anders gesagt, es gibt zwei ganze Zahlen m und n, sodass gilt $m^2 = 10n^2$.

Teil B Hier machen die Schüler sich mit zwei Kapiteln des Buches vertraut. Sie lesen den Text der ‚dritten Nacht' und der ‚fünften Nacht' und vergleichen die Primzahldefinitionen im Buch und im Unterrichtsmaterial, geben mathematische Beweise für die im Text anschaulich gemachten Formeln, geben die im Buch formulierten mathematischen Vermutungen wieder und versuchen über Internet, Lehrer oder andere herauszufinden, was es mit diesen Vermutungen auf sich hat.

Teil C Der Auftrag lautet: Schreibe nun selbst *die dreizehnte Nacht*. Zusätzlich sollen in einem gesonderten Teil die mathematischen Hintergründe dargelegt werden. In der Wahl des zahlentheoretischen Gegenstandes sind die Schüler im Prinzip frei, sie können aber aus einer gegebenen Liste von Themen auswählen. Unter diesen vorgeschlagenen Themen sind:

Pythagoreische Tripel, periodische Dezimaldarstellungen, magische Quadrate, Fünfecks- und n-eckszahlen, die Anzahl der Nullen am Ende von 1000! und !, Syracusefolge, Kaprekarzahlen, das Minimum aller Zahlen, die nicht in der Form $7n + 11m$ mit $m \in \mathbb{N}$ geschrieben werden können (bzw. $an + bm$ für gegebene a und b), Repunits, ggT und kgV, Quadratzahlen, Irrationalität, perfekte Zahlen und Mersenne Primzahlen, ein kariertes Rechteck mit Stäben ausfüllen, Stapelzahlen, Verteilen von Damesteinen, Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, Anzahl der Teiler einer Zahl, Teilbarkeit im Zehnersystem und einige kleinere Themen wie Zahlen, deren Quersumme gleich ihrer Wurzel ist (81) oder schnelles Kopfrechnen wie $47 \cdot 43 = 2021$ $(4 \cdot 5 = 20$ und $7 \cdot 3 = 21)$. Einzelne Themen werden weitergehend erläutert und die Schüler werden auf **www.ratio.ru.nl** und andere Internetadressen mit Information und faszinierenden Applets hingewiesen.

Natürlich ist die Liste der möglichen Themen offen und kann von jeder Lehrerin nach Belieben ergänzt oder verändert werden. Wie das unten stehende Beispiel einer Schülerarbeit zeigt, muss hierbei die Lehrerin nicht immer alle Details des vorgeschlagenen Themas im Vorhinein kennen, sofern es für sie jedoch überschaubar ist.

Bevor die Schüler schließlich mit Teil C, dem schreiben der 'dreizehnten Nacht' beginnen, korrigiert und bespricht die Lehrerin die Teile A und B. Mathematische Hintergründe und typische Fehler der Schüler werden besprochen. Wie die untenstehenden Beispiele zeigen, sind bereits in diesem Stadium Misskonzepte zu Tage getreten, an deren Vertreibung gearbeitet werden kann. Die Erfahrung mit diesem und früheren praktischen Aufträgen sowie auch die Arbeit (Van Schalkwijk, Bergen, Van Rooij, 2000) haben uns gelehrt, dass mathematische Erläuterungen bei entdeckendem Mathematikunterricht erst wirklich zum Lernprozess beitragen, wenn die Schüler zuvor ausreichend die Gelegenheit hatten, ihre eigenen Fragen zu formulieren. Es findet sich im Unterrichtsmaterial eine ausgearbeitete Musterlösung zu den Teilen A und B. Manche Lehrer haben den Auftrag geteilt und Teil C ein Jahr später in derselben Klasse behandelt.

Im Laufe der Unterrichtsreihe arbeiten die Schüler zu zweit oder zu dritt und verfertigen eine gemeinsame schriftliche Arbeit, in der sie alle ihre Aktivitäten dokumentieren – je nach Lehrer und Klasse noch versehen mit einem Logbuch, in dem die einzelnen Stunden verantwortet werden. Da regelmäßig solche Arbeiten in verschiedenen Fächern geschrieben werden, sind die Schüler hierin – insbesondere in der Handhabung von Textverarbeitung – sehr geübt. Eigentlich alle Gruppen reichen eine Datei oder einen Computerausdruck (manchmal noch nachträglich versehen mit eigenen Zeichnungen) ein. Viele Lehrer runden die Aktivität ab, indem sie die Schüler ihre Arbeiten vor der Klasse präsentieren lassen.

Ergebnisse der Schüler

Teil A und B: Die Schüler arbeiten motiviert an den 13 Behauptungen. Sie sind es nicht gewohnt, im Mathematikunterricht mit falschen Aussagen oder Gegenbeispielen konfrontiert zu werden. Oft finden sie gute Argumente, um die eine oder andere Behauptung zu stützen oder zu widerlegen. Fragen wie $0,\overline{9} = 1$ führen zu interessanten Gesprächen zwischen und mit den Schülern über die mögliche Bedeutung einer solchen Aussage, die das Verlangen nach klärenden Definitionen verstärken. Jedoch treten bei solchen Aussagen die oben angesprochenen Probleme des niederländischen Mathematikunterrichts mit dem Zahlbegriff offen zu Tage. Die Frage, ob $0{,}999\ldots = 1$ ist, beantwortet z. B. eine Schülergruppe mit: „Nein, weil 1 mit einer großen Potenz gleich 1 ist, aber 0,999… mit einer großen Potenz in die Nähe von Null kommt. Z. B. $1^{(10^{10})}$ und $0{,}999\ldots^{(10^{10})} = 0$ “. Ähnlich verhält es sich mit den Teilbarkeitsaufgaben. Die folgende Stellungnahme zu Behauptung 5 aus der obigen Liste ist typisch: „Wir wissen die Antwort und das zeigen wir an einem Beispiel. Wir nehmen eine lecker große Zahl, nämlich 35 876 421 839. Diese Zahl kann man durch 7, 11 und 13 teilen, also müsste es jetzt so sein, dass 35 876421–839 auch durch 7, 11 oder 13 teilbar sein sollte. Wenn wir dies betrachten bekommen wir das folgende: $35\,876\,421 - 839 = 358\,765\,582$. Diese Zahl ist nicht teilbar durch 7, 11 oder 13. Wir kommen also zum Schluss, dass diese Behauptung nicht wahr ist.“ Der Lehrer dieser Schüler erklärt uns, was hier geschehen ist: „Die

‚lecker große Zahl' ist scheinbar durch 7, 11 und 13 teilbar, da die Anzeige des Taschenrechners [TI-83] hier eine ganze Zahl angibt bei 13 zur Verfügung stehenden Stellen. … Außerhalb der Anzeige des Taschenrechners existiert für die Schüler nichts mehr." Wie ein anderer Lehrer berichtet lagen dem folgenden Zitat seiner Schüler ähnliche Überlegungen zugrunde: „*Behauptung:* Jede der Zahlen in der Folge 31, 331, 3331, 33 331,… ist eine Primzahl. Mit dieser Fragestellung heben wir keine Probleme gehabt. *Antwort:* Stimmt. *Erklärung:* All diese Zahlen enden auf 31, was eine Primzahl ist. Die Zahl 31 ist eine Primzahl und es ist egal, welche Zahl man davor setzt, man kann sie nicht teilen. …" Interessant bei vielen dieser Fehler ist, dass die Schüler Argumente benutzen, die an anderer Stelle im Mathematikunterricht akzeptiert, ja sogar verlangt werden. In der Nachbesprechung der Teile A und B hat der Lehrer begreiflicherweise alle Hände voll zu tun.

Teil C: Durch die Verschiedenheit der eingereichten Arbeiten ist es nicht leicht, die vielen dreizehnten Nächte in ihrer Gesamtheit dar zu stellen. Um einen Eindruck zu geben, betrachten wir hier exemplarisch eine Schülerarbeit, in der eines der Probleme mit weniger theoretischem Hintergrund bearbeitet wurde.

Stefan, Jeroen und Robin haben sich für das Thema *Verteilen von Damesteinen* entschieden, das im Unterrichtsmaterial wie folgt erläutert wird:

➔ „Man nehme 10 Damesteine und verteile sie willkürlich auf eine Reihe von Stapeln; als Beispiel nehmen wir 5 und 5. Nun nehmen wir von jedem Stapel einen Stein weg und bilden damit einen neuen Stapel. Diese Handlung wiederholen wir. In unserem Beispiel erhalten wir:

Beginn:		5	5		
Erster Schritt:	4	4	2		
Zweiter Schritt:	3	3	1	3	
Dritter Schritt:	2	2		2	4

So machen wir weiter. Es zeigt sich, dass auf die Dauer stabile Situationen entstehen."

Hierauf folgen dann einige Fragen. Was ist eine stabile Situation? Bei welchen Anzahlen bekommt man solche stabile Situationen? usw.

Die Schüler schrieben ein kleines Computerprogramm, mit dem sie das obige Spiel simulieren können. Schon die Primzahltests in Teil A hatten sie durch kleine selbst gemachte ‚try and error' Computerprogramme gelöst. Ihre Geschichte vom Zahlenteufel, die hier in Auszügen übersetzt wiedergegeben ist, haben sie mit vielen Abbildungen versehen (s. **Abb. 3**). Ohne Abbildungen hat sie einen Umfang von vier Seiten. Der Schreibstil ist typisch für die meisten Schülerarbeiten.

➔ ‚Die dreizehnte Nacht In der dreizehnten Nacht ging Robert extra früh zu Bett, denn er war noch müde von der Nacht davor. Nach einigen Minuten wurde er wach – aber nicht in dem Bett, in das er sich schlafen gelegt hatte. Er fand sich leibhaftig wieder auf einem gigantischen Damebrett! Um ihn herum nichts als blaue Luft, die Sonne und ein paar weiße Wolken, die langsam vorbei zogen. Robert fühlte sich gleich gut. Du rätst wohl schon, wer neben ihm saß, in der Tat, der Zahlenteufel.

…

➔ Der Zahlenteufel klatschte in seine Hände. „Ich werde dir heute Abend etwas über Damesteine erzählen!" „Damesteine?", sagte Robert erstaunt. „Ja, kommt mal rein", rief der Zahlenteufel. Auf einmal kamen 6 Damesteine auf kleinen Füßchen herbei gesprungen. (Zeichnung) „Macht einen Stapel von 6“, sagte der Zahlenteufel. Und sogleich reagierten die Damesteine. Artig sprangen sie aufeinander, wodurch ein schöner Stapel entstand. Doch was passierte dann?? Der oberste fiel herunter! Es waren nun zwei Stapel, einer mit 5 und einer mit einem Damestein. (Zeichnung) …“’

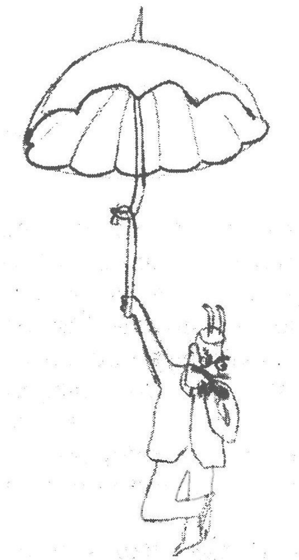

Abb. 3: Schülerzeichnung des Zahlenteufels

Dann wird erklärt wie das ganze funktioniert bis man drei Stapel erhält: 1, 2, 3.

➔ ‚„Was für ein schönes Dreieck!!“, rief Robert. Was dann passierte, erstaunte ihn sehr. Genauso wie zuvor, sprangen die obersten Steine von den Stapeln herunter und formten zusammen wieder einen neuen Stapel, doch das Ergebnis war verblüffend! (Zeichnung) „Jetzt haben wir wieder ein Dreieck“, sagte Robert. „Ja“, entgegnete der Zahlenteufel, „und nicht nur das: es ist genau dasselbe Dreieck!“. Und tatsächlich, der nächste Schritt ergab wieder das gleiche. „VIER HINZU“, schrie der Zahlenteufel. Singend kamen vier weiter Damestein hereinspaziert: lalalalallalallalalalalala, sangen sie. „RUHE“, schrie der Zahlenteufel. Die vier Damesteine gesellten sich fein ordentlich zu den anderen sechs. „Und jetzt das ganze mit 10 Steinen!“, sagte der Zahlenteufel. „Schon wieder ein schönes Dreieck!“, rief Robert begeistert. …’

Die Schüler erzählen in allen Einzelheiten, wie Robert dem Zahlenteufel klar macht, dass es genau die ‚Dreiecke’ von der Form 1, 2, 3, …, *n* sind, die eine stabile Situation ergeben. Die Anzahlen sind die Dreieckszahlen, die Robert und die Schüler schon zuvor kennen gelernt haben.

➔ ‚Und wenn man nun einen Stapel macht, der keine Dreieckszahl ist?“, sagte Robert. „Das wollte ich gerade sagen“, sprach der Zahlenteufel. Und ergänzte: „Ein Stein mehr!“ Gehorsam hüpfte ein einziges Steinchen hinzu, sodass es nun 7 Steine waren. Wieder fingen die Steine an, herum zu springen. Nach einer Weile sagte Robert: „Sieben ist keine Dreieckszahl. Die Steinchen können springen bis sie schwarz werden, ein Dreieck kann es niemals werden!“ Der Zahlenteufel sagte: „Das stimmt. Aber fällt dir nichts auf? Sie versuchen doch ein Dreieck zu werden, auch wenn es ihnen nie gelingen wird.“ Robert sah noch mal gut hin. „Du hast recht! Wenn sie einmal im Kreislauf sind, dann ähnelt die Form immer wieder einem Dreieck. Was für arme Steinchen.“’

Hierauf experimentieren Robert und sein Freund erst mit zehn und dann mit elf Steinen und stellen fest, dass es nun länger dauert bis die Form sich wiederholt. Daraufhin experimentieren sie ausgiebig weiter, wobei sie eine Tabelle mit Dreieckszahlen benutzen. Und dann schließlich kommt eine bemerkenswerte Beobachtung, nachdem die Beispiele dies zuvor immer mehr suggeriert haben.

➔ ‚Der Zahlenteufel folgerte: „Jedes Mal, wenn die Anzahl der Damesteine eine Dreieckszahl überschreitet, wird die Schleife einen Schritt länger.“ Robert nickte.’

Die Schüler untersuchen also nicht nur die stabile Situation sondern auch den Fall einer um eins erhöhten Dreieckszahl, den sie ebenfalls korrekt beschreiben. Auch den allgemeinen Fall haben sie beobachtet, wenn auch ohne Beweis.

➔ ‚„Ja sicher!“, antwortete der Zahlenteufel voller Selbstvertrauen. „Falls du es nicht glaubst, dann probier es einfach selbst! Denk dir ein paar Zahlen, mache aus den Zahlen Stapel und schau dir an, was passiert. Falls es eine Dreieckszahl ist, wirst du immer dieselbe stabile Situation erhalten, und falls es keine Dreieckszahl ist, bekommst du immer denselben Kreislauf.“
„Nun, ich bin doch ganz schön froh, dass ich nicht früh eingeschlafen bin“, sagte Robert erleichtert. Bevor jedoch der Zahlenteufel hierauf eine Antwort geben konnte, ging der Wecker und er wurde wach in seinem eigenen Bett.’

Lernziele Dieser Unterricht trägt zur Bildung des Zahlbegriffs bei, auch wenn danach noch viel zu tun bleibt. Der Beitrag besteht in der Vermittlung mathematischer Inhalte, die kreativ dargestellt werden und in der Auseinandersetzung mit hartnäckigen Misskonzepten. Die offene Konzeption des Unterrichts und die wenig formalen Anforderungen an die Darstellung verschaffen jedem Gehör, der gute Argumente anführen kann, wodurch wir Mathematik als menschliche Wissenschaft[10] vermitteln möchten. Unserem Eindruck nach sind die Schüler mit Hilfe des Zahlenteufels mathematisch kreativ mit divergenter Produktion befasst. Es fällt ihnen erstaunlich leicht, den Erzählstil Enzensberger aufzugreifen. Anders als bei der Darstellung mathematischer Sachverhalte sind Reflektionen über Mathematik selbst jedoch selten. Zum Schreiben einer Geschichte vom Zahlenteufel gehört, dass sich die Autoren die mathematischen Hintergründe sorgfältig erarbeiten, wobei kritisch bemerkt werden kann, dass bei manchen Schülergruppen die Untersuchung der Mathematik oft erst unabhängig von einer möglichen Geschichte durchgeführt wurde. Wenn die Mathematik einmal begriffen war, wurde das Verfassen der Geschichte als verhältnismäßig leicht empfunden und formte die Hülle für den wirklichen Inhalt dieser Schülerarbeiten. Auf jedoch fast alle Schülergruppen hat *die dreizehnte Nacht* eine motivierende Wirkung gehabt, vielleicht auch gerade, weil die Schüler hier – anders als sonst im Mathematikunterricht – auf immer überwindbare Schwierigkeiten stießen.

Auch die Lehrer beschäftigen sich mit Mathematik Die beteiligten Lehrer haben im Laufe der Entwicklung gelernt, wie man mit einer solchen Unterrichtseinheit umgehen kann. Darüber hinaus aber haben sie sich auch – oft gemeinsam mit ihren Schülern – mit Mathematik beschäftigt. Als eines von vielen Beispielen, die teilweise auch im Lehrerhandbuch zu finden sind, wählen wir hier noch mal die Folge 31, 331, 3331, … . Die Schüler haben meistens schnell mit Hilfe von Rechnern herausgefunden, dass diese Folge nicht ausschließlich aus Primzahlen besteht. Doch weckte die Folge auch den Ehrgeiz der Lehrer und ihrer Kollegen. Wir geben hier den Ansatz einer Kollegin[11] wieder, die den praktischen Auftrag in ihrer Parallelklasse durchgeführt hat. Dies zeigt, auch Lehrer betreiben aktiv und selbständig Mathematik bei dieser Unterrichtsreihe.

Zunächst bemerkte sie die Identität: $\underbrace{33\,333\ldots3331}_{n+1} = 10^{n-1}\cdot 31 + \underbrace{1111\ldots111}_{n-1}\cdot 21.$

Hierdurch reicht es, zu fragen, wann Zahlen der Form 1111…111, sogenannte *Repunits*, teilbar sind durch 31. Nun ist $\underbrace{1111\ldots1111}_{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$ und der kleine FERMAT’sche Satz besagt, dass $10^n - 1 \equiv 0 \bmod 31$ für $n = 30$. Daher ist 333.333.333.333.333.333.333.333.333.331 teilbar durch 31. Tatsächlich ist schon 333.333.331 teilbar durch 17, wie durch bloßes Probieren oder ein ähnliches, aber weniger elegantes Argument gezeigt werden kann.

Schluss

Kreativität in divergenter Produktion ist nicht planbar und wird sich immer einer perfekten Organisation entziehen. Nicht nur das Unterrichtsmaterial, sondern auch die inspirierende Persönlichkeit der Lehrerin ist es, die solche Kreativität hervorrufen kann. Daher ist die persönliche Weiterentwicklung der Lehrer in einem solchen Projekt ebenso wichtig für die Unterrichtsreihe wie das geschaffene Material. Beides ist das Produkt der Arbeit in der AZL Mathematikgruppe. Mit Erläuterungen für Lehrer zum Material und anderen Publikationen versuchen wir den gesamten Entwicklungsprozess für Außenstehende zugänglich zu machen.

Die Schüler Bo und Rick drücken in der Schlussbetrachtung ihrer Arbeit aus, dass sie das Verfassen einer Geschichte vom Zahlenteufel tatsächlich als mathematische Aufgabe gesehen haben: „Wenn man ein Kapitel aus dem Zahlenteufel liest, ist es simpel und einfach zu begreifen. Du denkst: für Kinder ist dies eine gute Art und Weise, spielerisch mit Zahlen Bekanntschaft zu machen und dadurch rechnen zu lernen. Das Umgekehrte tun, was wir ja müssen, ist, wie wir gemerkt haben noch ganz schön schwierig. Du musst etwas auf eine deutliche und einfache Art und Weise erklären, so dass Kinder es verstehen können. Es ist eine tolle Herausforderung, wie wir fanden." Und genau darum ging es in diesem Projekt.

Literatur

Van den Aarssen, M. & Alink, H. & Van den Hombergh, D. & Jordens, B. & Kaenders, R.H. & Klein Breteler, R. & Tacken, C. (2004). Spelen op een slimme manier, Nieuwe Wiskrant, 23-4.
Carlsen, W. S. (1997). Never ask a question if you don't know the answer. The tension in teaching between modeling scientific argument and maintaining law and order. The Journal of Classroom Interaction, 32(2), 14-23.
Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1960). Didactische Opstellen, NVWJ Thieme &Cie, Zutphen.
Enzensberger, H.M. (1997), Der Zahlenteufel, Deutscher Taschenbuch Verlag, München.
Enzensberger, H.M. (1998), De telduivel, De bezige bij, Amsterdam.
Freudenthal, H. (1971), Geometry between the devil and the deep sea, Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435.
Freudenthal, H. (1973), Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1,2, Klett.
Freudenthal, H. (1978), Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, Mathematik – Didaktik und Unterrichtspraxis, Oldenbourg, München Wien, ISBN 3-486-22161-2.
Freudenthal, H. (1991), Revisting Mathematics Education, China Lectures, Kluwer Academic Publishers, Doordrecht, ISBN 0-7923-1299-6.
Guilford, J.P. (1950), Creativity, The American Psychologist, 444 – 454.
Guilford, J.P. & Hoepfner R. (1976), Analyse der Intelligenz, Weinheim; Basel: Beltz.
Hadamard, J. (1945). The psychology of invention in the mathematical field, Princeton University Press.
Kaenders, R.H.: (2003), Verum, Pulchrum, Bonum, Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, deel 4, nr. 2.
Kaenders, R.H. (2005a). Hij gooide boeken uit de trein, Freudenthal 100, Nieuwe Wiskrant, 24-4.
Kaenders, R.H. (2005b). Play it smart: Towards a more autonomous teaching and learning of mathematics, preprint, www.ratio.ru.nl.
Kennedy, M. M. (1998). Education reform and subject matter knowledge. Journal of Research in Science Teaching.
Krainer, K.: (2003) Editorial; Teams, Communities & Networks, Journal of Mathematics Teacher Education, 6, 93–105.
Krüger, J. & van der Zwaart, P.: (2003). Vakdossiers 2003, SLO, Enschede, 2003.
Polya, G. (1945). How to solve it, A New Aspect of Mathematical Method, Princeton/New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1965). Mathematical discovery II (Chapter 14). Wiley & Sons.
Schalkwijk, L. Van (2000). Een tweede leven voor krasloten, Van A-lympiade naar praktische opdracht. Nieuwe Wiskrant 20-2, 2000.
Schalkwijk, L. Van & Bergen, T & Van Rooij, A.: (2000). Learning to prove by investigations: a promising approach in Dutch secondary education, Educational Studies in Mathematics, 43, 293-311.
Smid, H.J. (2004). Aansluiting vwo-wo: drama of hype?, Euclides, jaargang 80, nr. 3.
Verschaffel, L. & de Corte, E.: (1998) Actief en constructief leren binnen krachtige leeromgevingen, in Onderwijskundig lexicon III, Samson, Alphen a/d Rijn.
Wijers, M. & Hoogland, K.: (1999). Wiskunde, in: Samen aan de slag. Klein praktijkboek voor actief en zelfstandig leren. PMVO, 's Gravenhage, ISBN 90-74723-33-0.
Winter, H. (1989), Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht : Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik, Vieweg Braunschweig Wiesbaden, ISBN: 3-528-08978-4.
Wittmann E.Ch. (1995), Mathematics Education as a „Design Science". Educational Studies in Mathematics, 29 355-374.
Wittmann E.Ch. (2005), Realistic Mathematics Education, past and present. Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, deel 6, nr. 4.

Anmerkungen

(1) Havo ist vergleichbar mit der Realschule (bis zu Klasse 11, Zulassung zur Hogeschool, einer Art Fachhochschule) und vwo mit dem Gymnasium (bis zu Klasse 12, Zulassung zur Universität).

(2) Die AZL Mathematikgruppe besteht in etwas wechselnder Zusammenstellung seit 1999, zunächst mit Fachdidaktiker Van Schalkwijk, seit 2001 mit dem Autor. Teilnehmer an der Entwicklung von De telduivel waren: Mark an den Aarssen (Lindenholt College Nijmegen), Herman Alink, Dolf van den Hombergh, Bart Jordens (alle drei Elzendaalcollege Boxmeer), Richard Klein Breteler, Jos Winkel (beide Canisius College Nijmegen), Rainer Kaenders (zur Zeit des Projektes Canisius College und Radboud Universität Nimwegen). Das Projekt wird von den jeweiligen Schulen unterstützt und die beteiligten Lehrer opfern auch einen beträchtlichen Teil ihrer Freizeit. Die monatlichen Treffen finden reihum zuhause bei den Teilnehmern statt. Die Möglichkeit in vertrauter Zusammenarbeit mit Kollegen in vergleichbaren Schulen auszutauschen, bildet eine wichtige Motivation zur Arbeit in einer solchen Gruppe. Bisherige Projekte sind Rubbellose (Van Schalkwijk 2000), die Kugel auf der Landkarte, Schlau spielen (Van den Aarssen, Alink, Van den Hombergh, Jordens, Kaenders, Klein Breteler, Tacken, 2004), Der Zahlenteufel, Der Buchmacher und zur Zeit wird das Projekt Kugel auf der Landkarte wieder aufgegriffen im Projekt Von der Kugel zur Fläche.

(3) Eine große Schulbuchserie hat in ihrer neuesten Auflage das Kapitel zur Bruchrechnung zu einem zweiseitigen Paragrafen verkürzt, in dem Schüler lernen, Brüche in den Taschenrechner einzugeben.

(4) Unter allen in Schulen verwendeten Schulbuchserien ist das Internetschulbuch des Ratioprojektes die einzige „methode", bei der diese Aspekte des Zahlbegriffs noch eine Rolle spielen. (www.ratio.ru.nl)

(5) „Die Schülerinnen und Schüler in Deutschland sehen sich jedoch – im internationalen Vergleich – wenig unterstützt durch ihre Lehrkräfte. Die Schulleitungen in Deutschland bemängeln (im internationalen Vergleich sehr deutlich) die Arbeitshaltung der Schülerinnen und Schüler. Folgt man den Aussagen der Schülerinnen und Schüler, dann zeichnen sich deutsche Klassenzimmer im internationalen Vergleich hingegen durch ein hohes Maß an Disziplin aus." PISA 2003, Pisa Konsortium Deutschland

(6) Siehe www.ctwo.nl.

(7) 'Konvergente Produktion: Entwicklung logischer Schlussfolgerunge aus gegebener Information, wobei die Betonung auf dem Erreichen der einzigen oder im üblichen Sinne besten Lösung liegt. Es ist wahrscheinlich, daß die gegebene Information (der Hinweis) das Ergebnis wie in Mathematik oder der Logik vollständig determiniert.'
'Divergente Produktion: Entwicklung logischer Alternativen aus gegebener Information, wobei die Betonung auf der Verschiedenheit, der Menge und der Bedeutung der Ergebnisse aus der gleichen Quelle liegt. Beinhaltet wahrscheinlich auch die Erinnerung an Transfer (ausgelöst durch neue Hinweise).' (Guilford, Hoepfner, 1976, S. 98 ff.)

(8) „Children should repeat the learning process of mankind, not as it factually took place but rather as it would have done if people in the past had known a bit more of what we know now."

(9) Zum Vergleich zweier Zahlenfolgen genügt eine Betrachtung des Startwertes und der Differenzenfolge. Die Rolle von Induktionsbeweisen in diesem Rahmen war auch Gegenstand der Aktionsforschung.

(10) „Was ist wissenschaftlich? Ich würde sagen: das, was durchsichtig, von allem Überflüssigen befreit, zusammenhängend und ehrlich ist – das Gegenteil von schludrig, undeutlich, unzusammenhängend, Scheinargumante statt ehrlicher Argumente benutzend." Übersetzung aus (Ehrenfest-Afanassjewa, 1960)

(11) Frau Margriet Knops vom Canisius College Nijmegen.