

Entwicklung von Mathematikunterricht mit math-il.de am Beispiel des Zahlenteufels

Rainer Kaenders, Universität zu Köln

Abstract: Der Vortrag stellt Aufbau und Arbeitsweise des mathematikdidaktischen Internetlabors math-il.de dar, das seit dem Herbst 2009 im Internet zu finden ist. Vorbild für die Entwicklung des Internetlabors waren verschiedene Lehrerforschungsprojekte des Autors in den Niederlanden. Zur Erläuterung der Arbeitsweise in math-il.de wird hier das Projekt zum Zahlenteufel herangezogen.

1. math-il.de und das Beispiel Zahlenteufel

Seit dem Herbst 2009 ist das mathematikdidaktische Internetlabor math-il.de im Internet unter den Adressen math-il.de oder www.math-il.de zu finden und die ersten Projekte wurden zu Beginn des Jahres 2010 eingestellt. Bei der Entwicklung dieses Labors haben verschiedene Lehrerforschungsprojekte Pate gestanden, die der Autor mit Mathematiklehrern in den Niederlanden durchgeführt hat. Der Entwurf der math-il.de Forschungsplattform zur Entwicklung von Mathematikunterricht soll in diesem Beitrag anhand des Projektes zum Zahlenteufel dargestellt werden. Für detailliertere Informationen speziell zu diesem Zahlenteufel Projekt verweisen wir auf (Kaenders, 2006).

Die klassische Herangehensweise zur Veränderung der Unterrichtspraxis in der Schule besteht darin, dass man zunächst versucht, Lernprozesse in einem Fach wie Mathematik an sich zu verstehen, dann auf der Basis dieser Erkenntnisse innovativen Unterricht entwickelt und schließlich versucht, diesen Unterricht mit Hilfe von Fortbildungen, Veränderungen der Curricula und anderer Maßnahmen in der Schule zu implementieren und zu verbreiten. In den vergangenen Jahrzehnten hat sich jedoch gezeigt, dass die Veränderung von Unterricht nach dieser Methode, die bekannt ist als *Research, Development and Diffusion* (RDD), nicht gelingt. Heute wissen wir, dass innovative Unterrichtspraxis vor allem dann entsteht, wenn die Veränderungen direkt in Verbindung stehen mit der eigenen Unterrichtspraxis der Lehrer (z.B. Freudenthal, 1978; 1991, S.158; Walker, 1992). Eingriffe von außen durch vorgeschriebene Formen von Unterricht erzeugen Strategien auf Seiten der Lehrer, sich diesem Einfluss zu entziehen. Singuläre Lehrerfortbildungen bewirken kurzfristige und oft schnell verpuffende Effekte. Die positiven Auswirkungen direkter Veränderungen der Lehrpläne auf die Praxis Mathematikunterricht sind gering. Zu dem steckt hinter all diesen Herangehensweisen eine sich hartnäckig haltende positivistische Perspektive auf Mathematikunterricht: die Auffassung, dass es bestimmte Gesetzmäßigkeiten und Wahrheiten gebe, denen Mathematikunterricht gehorche und die es herauszufinden und umzusetzen gelte. Doch die Erfolge dieser Herangehensweise sind gering und sicher ist es nicht die einzige Möglichkeit, den Unterricht in Mathematik voranzubringen.

Demgegenüber steht eine Sichtweise auf Mathematikunterricht, als einem Prozess, der anhand fortschreitender Einsichten weiterentwickelt wird, die ihrerseits durch theoretische Perspektiven auf die Praxis entstehen. Gravemeijer (1994) nennt dies „theory-guided bricolage“: ein Prozess, der durch eine Theorie geleitet wird und neue Theorie entstehen lässt. Das Ergebnis dieses Prozesses sind nicht zuallererst Erkenntnisse zum Mathematikunterricht sondern wirklicher Mathematikunterricht, von dem man weiß, dass er seinen Zielen gerecht werden kann. Hinter diesem Forschungsansatz steht die Auffassung, dass vor allem diejenigen Personen, die in den Mathematikunterricht involviert sind, die Möglichkeit haben, ihn aufgrund theoretisch unterbauter Beobachtungen zu verändern. Ein so entwickelter Unterricht ist am Ende praktikabel und findet tatsächlich in der Schule statt.

Es geht also darum, Mathematiklehrer für die spezifische Veränderung ihres Mathematikunterrichts zu gewinnen und sie bei dem Verständnis ihres eigenen Unterrichts zu unterstützen. So kann die eigene Unterrichtspraxis systematisch weiterentwickelt werden. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Haltung der Lehrer und die Identifikation mit der eigenen Unterrichtspraxis. Einen viel versprechenden Ansatz zur Veränderung von Unterrichtspraxis formt die so genannte *kollaborative Interventionsforschung* (Krainer, 2003): Es handelt sich um eine Forschungsmethodik, bei der Lehrer kooperativ mit Didaktikern anhand konkreter mathematikdidaktischer Problemstellungen ihre eigene Unterrichtspraxis erforschen und weiterentwickeln. Verschiedene Projekte, wie das Sinus-Projekt in NRW oder das IMST-Projekt in Österreich arbeiten auf vergleichbare Weise und können hierdurch die Unterrichtspraxis konstruktiv und nachhaltig verändern. Grundlage für diese Herangehensweise ist, dass von mathematikdidaktischen Fragestellungen von Lehrern ausgegangen wird, die ihre eigene Praxis erforschen (action research) und dabei mathematikdidaktische Erkenntnisse für die Entwicklungsforschung einsetzen (Lesh, 2005; Wittmann 1995).

Bei math-il.de unterscheidet sich die Entwicklung von Unterricht deutlich von der Entwicklung von Unterrichtsmaterial. Bei der Entwicklung von *Mathematikunterricht* geht es darum, aktive und selbständige Mathematiklehrer, die auch die inhaltliche Verantwortung für ihren Unterricht behalten oder übernehmen, in die Lage zu versetzen, ihren eigenen Unterricht in seinen Methoden und Zielen inhaltlich weiterzuentwickeln und umzusetzen. Das dazu notwendige Unterrichtsmaterial soll diese Entwicklung zwar unterstützen, jedoch die fachliche Autorität des Lehrers/der Lehrerin nicht in Frage stellen oder gar ersetzen. Zu der Entscheidung, eine zuvor entwickelte Unterrichtseinheit in den eigenen Unterricht einzubauen, gehört selbstverständlich auch, dass etwa die Dynamik und die Ergebnisse der Entwicklungsforschung für die Lehrer in einem Lehrerhandbuch nachvollziehbar dargestellt werden, so dass sie von dem Lernprozess während der Entwicklung inhaltlich profitieren können. Unter diesen Voraussetzungen wird dann das für den eigenen Unterricht benötigte Unterrichtsmaterial entwickelt. Es kann in der Folge von den Lehrern für ihre eigenen Bedürfnisse in ihrem Unterricht eingesetzt und angepasst werden.

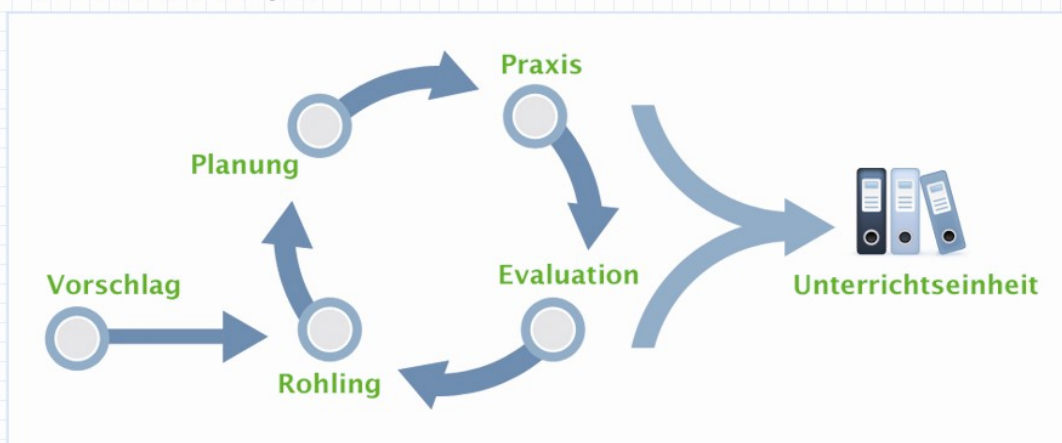
In den Niederlanden habe ich seit 1999 sechs Jahre lang mit der einer Gruppe engagierter Mathematiklehrer in der Region Nimwegen zusammengearbeitet, der so genannten AZL-Gruppe Mathematik (actief en zelfständig leren). Schon mit meinem dortigen Vorgänger Dr. Van Schalkwijk hat die Gruppe Projekte zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (Rubbellose) und zur sphärischen Geometrie (Die Kugel auf der Landkarte) durchgeführt. In der Zeit, in der ich mit der Gruppe gearbeitet habe, folgten Projekte zur Spieltheorie (Schlau spielen), zur Zahlentheorie (Der Zahlenteufel), zu Strategiespielen (Der Buchmacher) und zur Astronomie (Doppelplaneten). Seit dem Jahr 2010 arbeitet mein Doktorand in Köln, Herr Stephan Berendonk, gemeinsam mit der AZL-Gruppe, die jetzt von Dr. Leon van den Broek geleitet wird, mit an einem Projekt zu Topologie in die Schule. Aus der Arbeit der AZL-Gruppe sind einige Veröffentlichungen, Vorträge und Lehrerhandbücher entstanden, die auch unter der Adresse www.ratio.ru.nl zu finden sind. Das Projekt lebt vor allem vom unermüdlichen Einsatz der beteiligten Mathematiklehrer.

Das mathematikdidaktische Internetlabor math-il.de, das seit dem Jahr 2008 zusammen mit der Firma WebWerk aus Berlin an meinem Lehrstuhl entwickelt wurde, soll engagierten Mathematiklehrern die Möglichkeit bieten, gemeinsam mit Kollegen und Fachdidaktikern ihren eigenen Unterricht anhand konkreter mathematikdidaktischer Problemstellungen weiter zu entwickeln. Hierfür hat die Entwicklungsforschung an der Radboud Universität Nimwegen Modell gestanden (Kaenders, 2006; 2007; Kaenders & Oolbekkink, 2009 und Van den Aarssen et al., 2004).

math-il.de }

INTERNETLABOR FÜR
ANSPRUCHSVOLLEN
MATHEMATIKUNTERRICHT

— Arbeitsweise im Projekt



2. Entwicklergruppe

Den Kern eines Projektes im Internetlabor formt eine **Entwicklergruppe**, die neben dem Projektleiter aus fünf bis zehn Mathematiklehrern besteht. Die Lehrer entwickeln dabei zusammen mit den am Projekt beteiligten Mathematikdidaktikern Unterrichtseinheiten für ihren eigenen Unterricht. Die Gruppe durchläuft dabei eventuell mehrmals den obigen Entwicklungszyklus, bevor eine Unterrichtsreihe fertig gestellt und veröffentlicht wird. Dieser Prozess soll hier detaillierter beschrieben werden.

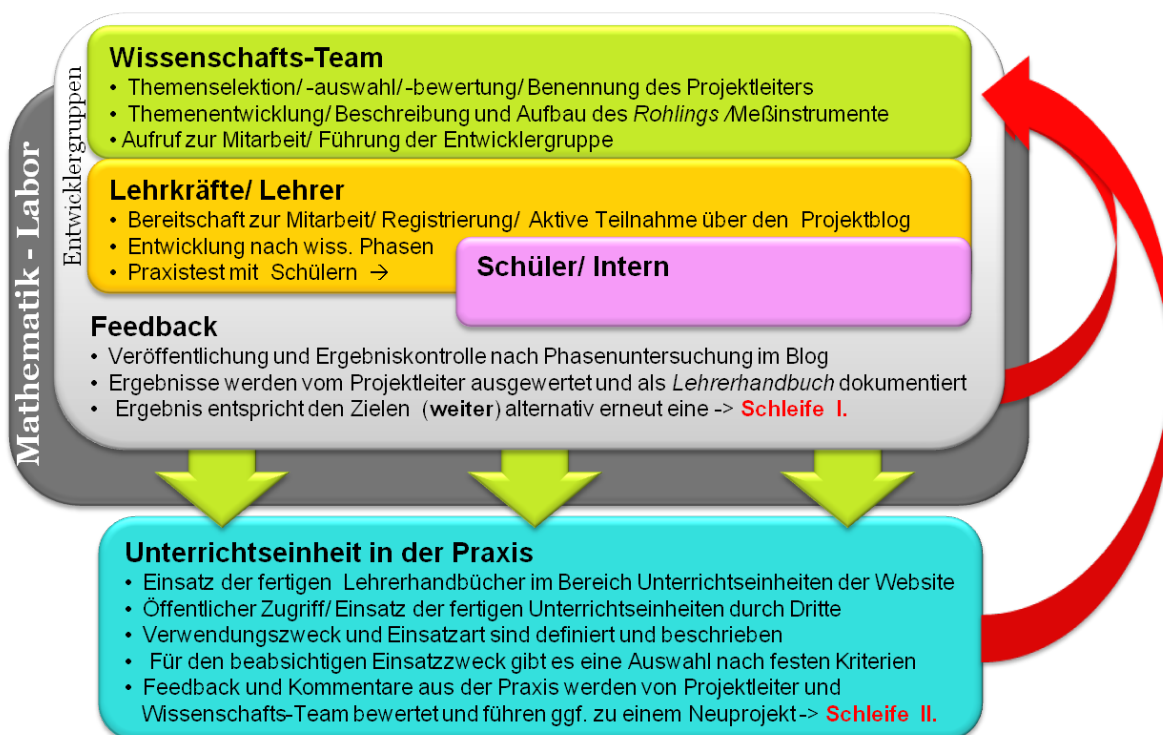
Ausgehend von konkreten mathematikdidaktischen Fragestellungen, Unterrichtsideen und auf die Fragestellungen bezogenen Messinstrumenten soll Lehrern zusammen mit Mathematikdidaktikern in math-il.de die Möglichkeit gegeben werden, kollaborativ in kleineren Gruppen ihren eigenen Unterricht weiterzuentwickeln, untereinander auszutauschen, zu verbessern und mit Erkenntnissen der didaktischen Forschung und Entwicklung abzustimmen. Da die alltägliche Unterrichtspraxis und auch Schulbücher eine solche Dynamik nicht haben, ist der Einsatz eines solchen Internetlabors hier sinnvoll.

Anhand der in das Labor implementierten Methoden der kollaborativen Interventionsforschung bietet es die entsprechenden elektronischen Umgebungen zur gemeinsamen Entwicklung von Unterricht an. Es kann als Experimentierfeld für innovative Unterrichtsideen genutzt werden, die sowohl Lehrerinnen und Lehrer als auch Schülerinnen und Schüler anregen und sie für die Mathematik begeistern sollen. Das Internetportal mit der entsprechenden Entwicklungsumgebung bietet zudem eine verhältnismäßig einfache Art und Weise, Schüler und Lehrer direkt zu erreichen und somit der Früchte der dort geleisteten Forschungs- und Entwicklungsarbeit teilhaftig werden zu lassen. Für die Arbeit mit den Lehrern ein methodisch strukturierter Blog mit einer Materialsammlung und anderer Funktionen zur Verfügung.

Die Beweggründe der Lehrkräfte und der Wissenschaftler zur Teilnahme an einem solchen Projekt sind in der Regel nicht deckungsgleich. Dabei sollte man die Unterschiedlichkeit der Interessen der einzelnen beteiligten Gruppen an einer solchen Zusammenarbeit nicht unterschätzen. Lehrer sind in erster Linie daran interessiert, hochwertige Ideen, Entwürfe und Materialien für ihren eigenen Unterricht zu haben. Der dazu nötige Aufwand sollte nicht wesentlich den Aufwand übersteigen, den die Vorbereitung des eigenen selbst gestalteten Unterrichts kosten würde. Die Forschungsaktivitäten interessieren sie vor allem dann, wenn sie konkrete Verbesserungen für diesen eigenen Unterricht ermöglichen. Mathematikdidaktiker dahingegen sind an allgemeineren Aspekten und Erkenntnissen zu Unterricht und Entwicklungsarbeit interessiert und wollen/müssen sich über diese Arbeit auch profilieren.

Gerade, wenn man davon ausgehen kann, dass Lehrer und Wissenschaftler aus unterschiedlichen Motivationen die Zusammenarbeit in einer solchen Gruppe suchen, ist es wichtig, sich in den unterschiedlichen Rollen auf gemeinsame Ziele zu verpflichten. Dann können sich die jeweiligen Rollen zum Erreichen dieser Ziele verstärken und allen Interessen gerecht

werden. Die verschiedenen Rollen und Interessen der Teilnehmer sind im Entwurf des Labors berücksichtigt. Die unten stehende Grafik illustriert die unterschiedlichen Rollen während der Arbeit im Labor. So relativiert zum Beispiel die Arbeit im Team den eigenen zusätzlichen Arbeitsaufwand für die Lehrer, so dass man einen persönlichen Unterricht auf einem höheren Niveau entwickeln kann als es die eigenen Möglichkeiten hergeben.



Da die AZL-Gruppe keine Internetplattform zur Verfügung hatte, fand die Zusammenarbeit an gemeinsamen Abenden bei den Mitgliedern der Gruppe statt, an denen die weiteren Arbeiten abgesprochen wurden. Solche die für eine vertrauensvolle Zusammenarbeit wichtigen persönlichen Treffen sollen auch bei math-il.de Projekten stattfinden. Die Umgebung des Blogs bietet vor allem einen Rahmen für die alltägliche Zusammenarbeit.

3. Von der mathematikdidaktischen Problemstellung zum Rohling

Ein Projekt beginnt mit einem Vorschlag. In der AZL-Gruppe entsteht ein solcher Vorschlag durch Diskussion über die Probleme, die von den Teilnehmern in ihrem Unterricht erkannt werden. Oft hat schon ein Teilnehmer selbst für eine solche Problemstellung mehr oder weniger provisorische Materialien für den eigenen Unterricht entwickelt, die als Ausgangspunkt für das Projekt verwendet werden können.

Bei math-il.de besteht für jeden Lehrer und auch für andere Interessierte die Möglichkeit, einen Vorschlag zu formulieren, der eine klar formulierte mathematikdidaktische Problemstellung berührt, die entweder aus der eigenen Praxis kommt oder für deren Bearbeitung eine andere nachvollziehbare Motivation besteht. Innerhalb des math-il.de Teams schauen

wir dann, ob wir ein Projekt zu diesem Vorschlag starten können. Zur Formulierung eines Vorschlags müssen nur einige wenige Fragen kurz beantwortet werden:

1. Welches Thema hat Ihr Vorschlag?
2. Bitte beschreiben Sie Ihren Vorschlag kurz.
3. Wie lautet die mathematikdidaktische Fragestellung?
4. Bitte geben Sie die Rahmendaten für die spätere Unterrichtseinheit an (z.B. Schulform, Bundesland, Klassenstufe etc.)
5. Gibt es erste Erfahrungen, Lösungsansätze oder -vorschläge? (z.B. eigene Ansätze, Wahrnehmung, Interpretationen etc.)
6. Hier können Sie erste Materialien hochladen.
7. Gibt es zusätzliche Informationen zu Ihrem Vorschlag?

Die Dynamik der Laborarbeit stellt sich nun wie folgt dar. In der *ersten Phase* des Projektes wird aufgrund mathematikdidaktischer Erkenntnisse ein so genannter **Unterrichtsrohling** (oder kurz **Rohling**) erstellt. Dies ist ein auf theoretischer Basis erstellter Entwurf des Unterrichts, mit dem Lösungsansätze zu der didaktischen Fragestellung gefunden werden könnten. Der Erstellung des Rohlings geht eine mathematikdidaktische Literaturrecherche sowohl zu stoffdidaktischen als auch zu allgemeineren mathematikdidaktischen Aspekten der jeweiligen Fragestellung voraus. Der Rohling ist also der Versuch, einen innovativen Unterrichtsansatz zunächst aufgrund theoretischer Betrachtungen in Kenntnis der einschlägigen mathematikdidaktischen Forschung inhaltlich begründet zu erstellen. Hier können Texte, Bilder, Applets, zusätzliche Gestaltungselemente, downloadbare Materialien, Software und so weiter eingebaut werden.

In der AZL-Gruppe gab es in der Regel einen Teilnehmer, der bereit war, einen ersten Entwurf für den Unterricht zu erstellen. Gemeinsam wurde dieser dann bearbeitet und es wurde diskutiert, inwieweit der Entwurf zur Lösung der vorher formulierten mathematikdidaktischen Problemstellung beitragen könnte und wie man das im Unterricht denkt wahrnehmen zu können.

Für den Zahlenteufel etwa ergab sich die mathematikdidaktische Problemstellung vor dem folgenden Hintergrund. Zunächst finden wir im niederländischen Mathematikunterricht Probleme bei der möglichen Zahlbegriffsentwicklung bei Schülern. So kommt etwa zurzeit noch ein Begriff wie Primzahl im regulären Unterricht weder in der Grund- noch in der weiterführenden Schule vor¹. Der Verlust klassischer Inhalte geht einher mit einem Rückgang

¹ Die durch die ministerielle Kommission cTWO gestalteten Reformen werden dies ab dem Jahr 2013 ändern (siehe www.ctwo.nl). Unter anderem der Mathematikunterricht für Schüler der Realschule und des Gymnasiums soll wieder näher an die mathematische Kultur herangeführt werden (vgl. Kaenders, 2009).

der Entwicklung einer für die betrachteten Inhalte adäquaten mathematischen Sprache (vgl. Kaenders, 2009). Daneben gibt es eine starke Betonung und Förderung aller Formen aktiver und selbständiger Lernprozesse. Vor diesem Hintergrund hatte sich die AZL-Gruppe auch schon in dem Vorläufer-Projekt *Schlau spielen* mit der Förderung authentischer divergenter Kreativität im Mathematikunterricht befasst. Das bedeutet, dass die Schüler innerhalb gegebener Grenzen Kreativität, Inhalte und Initiative selbst entwickeln. Der Lernprozess der Schüler ist dann prinzipiell nicht vollständig vorhersagbar und steuerbar. Anders als bei vielen Formen von z.B. discovery learning, Stationen Lernen oder der selbständigen Arbeit in Schulbüchern handelt es sich hier nicht um das, was Freudenthal (1991) das Verstecken von Ostereiern nannte. Auch, wenn es in dem Projekt *Schlau spielen* tatsächlich in einem klar vorgegebenen Rahmen zu Nullsummen-Spielen gelang, solche Formen authentischer divergenter Kreativität entstehen zu lassen, handelte es sich hierbei um ein für die Schule exotisches Thema. Daher haben wir uns gefragt: Wie können Schüler in der Darstellung klassischer mathematischer Inhalte divergent kreativ sein

Dabei entstand dann die Idee, die Schüler eigene zahlentheoretischen Erkundungen auf kreative Weise darstellen zu lassen. Das Buch ‚Der Zahlenteufel‘ von Hans-Magnus Enzensberger diente als Beispiel dafür, wie dies auf mathematisch anspruchsvoll geht.

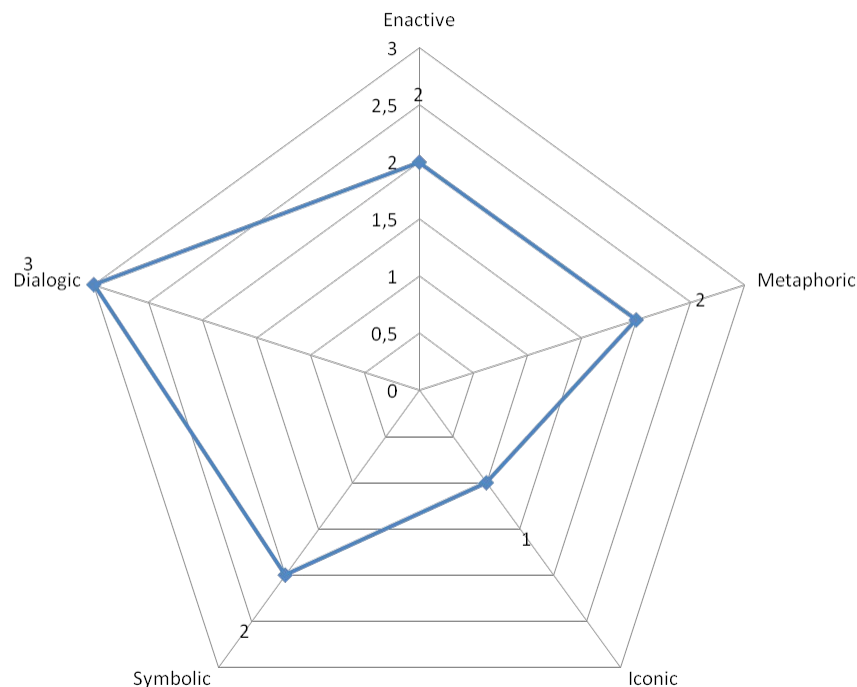
Im Internetlabor math-il.de soll ein an der Problemstellung und an den vorläufigen Unterrichtsentwürfen orientiertes **Messinstrument** entwickelt werden, mit dessen Hilfe sich die Arbeitsgruppe während der Laborarbeit tieferes Verständnis der Wirkung des jeweiligen Unterrichts verschaffen kann. Hierzu können kleine Experimente und die verschiedensten Mittel wie Fragebögen, Videoaufzeichnungen, Transkripte von Dialogen, (semi-) strukturierte Interviews, etc. Anwendung finden. Allgemein ist ein solches Messinstrument in der Regel an den Unterrichtsentwurf gebunden.

Auch zu dem Zahlenteufelprojekt wurde noch nach dem Projekt ein Messinstrument entwickelt, das helfen sollte, die divergente Kreativität in den Schülerarbeiten wahrzunehmen. Dazu wurden die kreativen Äußerungen der Schüler aus fünf unterschiedlichen Blickwinkeln betrachtet: metaphorisch, ikonisch, symbolisch, dialogisch und enaktiv. D. h. es wird geschaut, in welchem Maße es den Schülern gelingt, die Mathematik anhand von Metaphern, Bildern, Formeln, Argumentationen und Handlungen darzustellen, die sich zwischen Robert und dem Zahlenteufel abspielen. Es wurde dann eingeordnet, inwieweit diese Mittel auch in der Lage waren, die mathematischen Sachverhalte zu verdeutlichen. Eine phantasievoll geschriebene Geschichte alleine muss nicht zwangsläufig dazu in der Lage sein. Es wurde analysiert, in welchem Maße die jeweiligen Aspekte verwirklicht sind, und dies wurde wie folgt bewertet:

- 0 dieser Aspekt ist nicht oder kaum zu identifizieren
- 1 dieser Aspekt ist in geringem Maße erkennbar
- 2 dieser Aspekt ist explizit anwesend

3 dieser Aspekt ist virtuos eingesetzt

Trägt man diese Daten wie unten in ein Diagramm ein, entstehen Bilder der Kreativität, die in den Schülerarbeiten anzutreffen ist. Diese Analyse kann helfen, die Kreativität der Schüler zu verstehen und einzuordnen.



Diese Analyse ist jedoch nicht gleich der Bewertung der Schülerarbeiten. Bei manchen Themen bieten sich bestimmte Ausdrucksformen sinnvollerweise mehr an als andere. Für die Benotung der Arbeiten gibt es ein eigens zu diesem Zweck entwickeltes Schema, das den Lehrern helfen kann, ihre Note persönlich den Schülern gegenüber zu verantworten.

Allgemein sollte der Unterrichtsrohling also zunächst aufgrund eines Vorschlags erarbeitet werden. Der erste Entwurf wird theoretisch begründet und enthält neben der eigentlichen Problemstellung bereits vorläufige Unterrichtsideen und -ziele mit Materialien, Hintergrundliteratur und ein an der Fragestellung orientiertes Messinstrument, mit dessen Hilfe sich später die Projektgruppe über das Erreichen der gesteckten Ziele Klarheit verschaffen kann.

Notwendigerweise sollten beim Rohling die folgenden Punkte vorhanden sein:

1. Ausgearbeitete und im Schulsystem verortete didaktische Problemstellung
2. Vorläufige Unterrichtsentwürfe mit Materialien
3. An der Problemstellung orientiertes Messinstrument
4. Hintergrundliteratur

5. Erste Erfahrungen und Erwartungen

6. Präsentation des Rohlings in math-il.de (Filme, Applets, etc.)

Der Unterrichtsrohling kann dann auf math-il.de ausgestellt werden, so dass sich Lehrer finden, die genau an diesem Projekt mit den formulierten Zielen mitarbeiten wollen, um ihren eigenen Unterricht in der formulierten Richtung zu entwickeln. D. h., in dieser Phase bildet sich eine **Entwicklergruppe** aus Mathematiklehrerinnen und -lehrern um den Rohling, die von der Wissenschaftlerin oder dem Wissenschaftler geleitet wird, die den Rohling erstellt hat. Diese Entwicklergruppe nimmt die Vorarbeiten zum Rohling in ihrer ganzen Breite zur Kenntnis und kann dann frei darüber verfügen und mit der praxisnahen Entwicklung beginnen. Die Mitglieder der Entwicklergruppe sollten sich zu Beginn und während der Entwicklung persönlich auf entsprechenden Arbeitstagen kennen- und vertrauen lernen, so dass sie dann auch innerhalb der in math-il.de eröffneten digitalen Möglichkeiten konstruktiv zusammenarbeiten können. Für die alltägliche Arbeit spielt dann der eingerichtete strukturierte Blog eine wichtige Rolle und ermöglicht es zudem auch, den Lernprozess der Gruppe während der Entwicklung zu dokumentieren und zu erforschen. Sobald der entwickelte Rohling fertig gestellt ist, wird das Projekt zur Teilnahme ausgeschrieben. In jedem weiteren Zyklus und vor der Veröffentlichung wird der Rohling nach der Evaluationsphase von der Projektgruppe weiterentwickelt.

4. Entwicklungszyklus

Die zyklische Arbeitsweise, an deren Ende eine fertige Unterrichtseinheit steht, stellt sich dann wie folgt dar.

Planung. In dieser Phase hat sich bereits eine feste Arbeitsgruppe aus Mathematikdidaktikern, Lehrern oder auch engagierten Studenten gebildet, die zunächst die Vorarbeiten zur Erstellung des Rohlings in ganzem Umfang zur Kenntnis nimmt. Anschließend werden Rollen vergeben und Arbeiten koordiniert. Die Gruppe entscheidet, wer zu welchem Zeitpunkt anhand des Rohlings unterrichtet und wann welche Messungen mit Hilfe des Messinstrumentes abgenommen werden sollen. Des Weiteren wird die Redaktion der Materialien und des Lehrerhandbuchs sowie die Aufbereitung der Messdaten organisiert.

Praxis. Nun wird die vorherige Planung in die Praxis umgesetzt. Der im Rohling entwickelte Unterricht wird von den teilnehmenden Lehrerinnen und Lehrern und eventuell auch von interessierten Kollegen in den eigenen Unterricht integriert. Während und nach dem Unterricht werden die notwendigen Daten mit Hilfe des Messinstrumentes erhoben, die zur Vorbereitung der Evaluationsphase in einem ersten Schritt von den jeweiligen Lehrern zusammengefasst und aufbereitet werden.

Evaluation. In der Phase der Evaluation werden die Daten von den Teilnehmern zusammengeführt und weiter aufbereitet. Anschließend werden die Ergebnisse evaluiert und in Hinblick auf die mathematikdidaktische Problemstellung interpretiert, so dass begründete

Entscheidungen über die Weiterentwicklung des Rohlings getroffen werden können. Je nach Ergebnis wird ein neuer Zyklus eingeleitet bis der entwickelte Unterricht den gesteckten Zielen genügt und einen substanziellen Beitrag zur ursprünglichen mathematikdidaktischen Fragestellung liefert.

Die Entwicklungsarbeit führt schließlich zu einer **Unterrichtseinheit**: Nach getaner Entwicklungsarbeit, d. h. wenn der entwickelte Unterricht den gesteckten Zielen genügt und einen substanziellen Beitrag zur ursprünglichen Fragestellung liefert, wird eine ausgearbeitete Unterrichtseinheit in Form eines Lehrerhandbuchs veröffentlicht. Dieses beinhaltet neben Unterrichtsmaterialien auch Angaben zu Methodik und Zielsetzung sowie weitergehende Veröffentlichungen, Hintergrundliteratur, Links und eventuelle Fortbildungsmöglichkeiten. Hierdurch werden Entwicklungsschritte transparent und die Ergebnisse der Entwicklungsforschung nutzbar gemacht. Die Unterrichtseinheit wird mit Hilfe des Lehrerhandbuchs und durch Lehrerfortbildungen über math-il.de weiter verbreitet.

Der so entwickelte Mathematikunterricht kann nachweisbar authentischeren Unterricht in der Praxis der teilnehmenden Mathematiklehrer ermöglichen und den Beweis erbringen, dass ein solcher Unterricht unter den gegebenen Bedingungen durchführbar ist. Neben dieser Entwicklungsforschung findet auch die Erforschung der Prozesse statt, die zur Entwicklung dieses Unterrichts führen.

5. Der Zahlenteufel

Beim Projekt zum Zahlenteufel ist Projektunterricht in drei Teilen entstanden, der als *praktische opdracht* gegeben werden kann, wie es in den Niederlanden in der Oberstufe von Realschule (HAVO) und Gymnasium (VWO) vorgesehen ist. In einem ersten Teil A werden dabei den Schülern sehr elementare Konzepte zur Zahlentheorie, wie etwa der Begriff der Primzahl, nahe gebracht.

In der Folge werden die Schüler mit einer Reihe von Aussagen konfrontiert, bei denen sie begründet angeben müssen, ob diese wahr oder gelogen sind. Dazu gehören Aussagen, wie:

- Falls eine ungerade natürliche Zahl keine Primzahl ist, so ist sie durch 3, 5, 7, 11 oder 13 teilbar.
- Die quadratische Folge, die wie folgt beginnt 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83,... besteht ausschließlich aus Primzahlen.
- Es gibt nur endlich viele Primzahlen. Am 15. Dezember 2005 haben Dr. Cooper und Dr. Boone die 43. Mersenne-Primzahl gefunden. Sie lautet: $2^{30.402.457}-1$.
- Für jede natürliche Zahl n gilt: $(1+2+3+4+\dots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3$.
- Jede der Zahlen in der Folge 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331, 333333331, 3333333331... ist eine Primzahl.

- Es gibt mindestens zwei Zahlen n , für die $n^3 - 1$ eine Primzahl ist.
- Wenn man vier aufeinander folgende Zahlen miteinander malnimmt und 1 hinzu zählt, erhält man immer ein Quadrat.
- Für $a = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ gilt, dass die Zahlen a und $1/a$ dieselben Ziffern inter dem Komma haben.

Im zweiten Teil B befassen sich die Schüler mit Enzensbergers Buch, in dem sie den Text der dritten und der fünften Nacht lesen und dazu einige Aufgaben bearbeiten.

In Teil C schließlich lautet die Aufgabe: Schreibt nun selbst *die dreizehnte Nacht* und verfasst eine mathematische Erläuterung dazu. Dazu werden den Schülern eine ganze Reihe von mehr oder weniger anspruchsvollen Themenvorschlägen gemacht. Diese reichen von einfachen Teilbarkeitsregeln bis hin zu pythagoreischen Tripeln oder noch anspruchsvolleren Themen wie perfekten Zahlen und Mersenne Primzahlen. Auch ungelöste Probleme, wie etwa die so genannte Syracuse-Reihe kommen dabei vor.

In der AZL-Gruppe entstanden während der Entwicklungsarbeit verschiedene Produkte, wie Unterrichtsmaterialien und ein Lehrerhandbuch, in dem schulische Hintergründe, Erfahrungen und Mathematik erläutert werden. Daten, die während der Entwicklungsarbeit erhoben wurden, sind die Schülerarbeiten, Videoaufnahmen von Abschlussgesprächen, Fragebögen und die Protokolle der Sitzungen der Lehrergruppe.

Im Ergebnis hat sich gezeigt, dass Unterricht möglich ist, der divergente Kreativität in Zusammenhang mit Zahlentheorie entstehen lässt. Wichtig war dabei, dass die Lehrer die Lernprozesse ihrer Schüler auch selbst aktiv und kreativ gestalten. Die Tatsache dass auch die Lehrer selbst wieder Mathematik gelernt haben, hat sich positiv auf die Schüler ausgewirkt. Während der Entwicklungsarbeit ergaben sich auch verschiedene Detailfragen, wie etwa nach einem geeigneten Umgang mit mathematischen Techniken wie vollständiger Induktion oder mit von Schülern frei formulierten Beweisen. Aber auch ganz praktische Erkenntnisse wurden deutlich. So hat es sich etwa als sinnvoll herausgestellt, zunächst Teil A zu korrigieren, zu besprechen und dann erst mit den Teilen B und C zu beginnen.

Den Kern dieses Projektes haben zwei Schüler wie folgt zusammengefasst:

„Wenn man ein Kapitel aus dem Zahlenteufel liest, ist es leicht und einfach zu begreifen. ... Das Umgekehrte tun – was wir ja müssen – ist, wie wir gemerkt haben, noch ganz schön schwierig. Du musst etwas auf eine deutliche und einfache Art und Weise erklären, so dass Kinder es verstehen können. Es ist eine tolle Herausforderung, wie wir fanden.“

Das Projekt der Zahlenteufel ist jetzt noch mal für den deutschen Mathematikunterricht bei math-il.de aufgelegt. Da hier die Hintergründe und Problemstellungen andere sind, ist es gut möglich, dass sich das Projekt in eine andere Richtung bewegt.

Literatur

Freudenthal, H. (1978): *Weeding and Sowing, Preface to a Science of Mathematical Education*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, ISBN 90-277-0789-8

Kaenders, R. H. (2006): *Zahlbegriff zwischen dem Teufel und der tiefen See*. Der Mathematikunterricht, 52(5).

Kaenders, R. H. (2007): *Kreiseln im Weltraum: Lehrerforschung zwischen Wissenschaft und Schulpraxis*. Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker.

Kaenders, R. H. (2009): *Von Wiskunde und Windmühlen - über den Mathematikunterricht in den Niederlanden*, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hauptvortrag GDM-Tagung in Oldenburg, GDM.

Van den Aarssen, M., Alink, H., van den Hombergh, A., Jordens, B., Kaenders, R., Klein Breteler, R., Tacken, C. (2004): *Spelen op een slimme manier*. Nieuwe Wiskrant 23 (4), 10-16.

Kaenders, R. H. & Oolbekkink, H. (2009): *Leerlingen leren wiskunde bedrijven*, in: Jeroen Imants & Helma Oolbekkink (Red.) *Leren denken binnen het schoolvak*, Garant Uitgevers nv, 103-113.

Krainer, K. (2003): *Interventionsstrategien. Auf dem Weg zu einer „kooperativen Interventionsforschung“*. In: Schmidt, E. (Hrsg.): *Interventionswissenschaft – Interventionsforschung. Erörterungen zu einer Prozesswissenschaft vor Ort*. Bd. 2 der Klagenfurter Beiträge zur Interventionsforschung, 43-66.

Lesh, R. (2005): *Mathematics Education as a Design Science*. Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 37 (6).

Lutz-Westphal, B. (2006): *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht*. Dissertation, TU Berlin.

Wittmann, E. Ch. (1995): *Mathematics Education as a “Design Science“*. Educational Studies in Mathematics 29, 355-374.